附 錄

1、數e和π的超越性

第一個課題，我將討論數 e 和 π，特別是我希望證明它們是超越數。

從古代開始就以幾何問題的形式對 π 發生了興趣。甚至在那時已將它的近似計算和它的嚴格理論構造問題區分開來，並爲兩個問題的解決打下了一定的基礎。在第一個問題方面，阿基米德借助於內接和外切多邊形逼近圓的方法取得了實質性的進展。第二個問題不久就集中到是否能用直尺和圓規作出 π 來。試用了所有方法，但沒有懷疑過不斷失效的原因是由於作圖的不可能性。某些早期的嘗試已由魯迪奧[①]滙集發表了。化圓爲方的問題仍然是最受關注的問題之一，正如我已提到的，許多人企圖自尋出路以求解決這個問題，而不知道或者不相信，現代科學早已回答了這個問題。

事實上，這些古老的問題今天早已完全解決。人們有時傾向於懷疑人類的知識是否眞正能向前發展，而在某些領域內，這個懷疑可能是正確的。但在數學上，我有一個例子說明確實不必懷疑。

以上問題的現代的解法的基礎，可以從牛頓和歐拉之間的時期說起。對 π 進行近似計算的有力工具是無窮級數，它可以按所需的準確度進行計算。最精心的結果是英國人香克斯獲得的的結果，它把 π 計算到了707位[②]。這只好當作像運動員熱衷於打破記錄一樣的行動，因爲任何應用都不會要求這樣的準確度。

---

① Rudio（魯迪奧）《Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und Hippokrates》，萊比錫，1908年。

② Shanks （香克斯），參閱韋伯—韋爾斯坦教科書，第一卷，523頁。

在理論方面，我們發現在同一時期，開始了對自然對數的底即數 e 的研究。著名的關係 $e^{i\pi}=-1$ 已被發現，在積分學中已研究出了對於最終解決圓的求積（即化圓爲方）的問題至關重要的一種方法。解決此一問題的關鍵步驟是厄爾米特在1873年證明了 e 的超越性[①]。它未能證出 π 的超越性。這件事是由林德曼在1882年完成的[②]。

這些結果是對上述古典問題的本質推廣。以前只關心用圓規直尺作出 π，分析上相當於用有限次開平方根和有理數來表示 π 的問題。但現代的結果不限於證明這種表示的不可能性，而是證明了更深刻的結果，即 π（和 e 一樣）是超越數，即它不滿足任何整數係數的代數關係。換句話說，e 和 π 都不可能是一個整數係數方程

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$$

的根，不論 $a_0,\cdots,a_n$ 和次數 n 取得多大。係數是整數這一點是關鍵的，當然對分數也行，因爲乘以公分母可將係數變爲整數。

我們現在用希爾伯特在1893年《數學年刊》第43卷中所給出的簡化方法，證明 e 的超越性。我們將指出，如假設存在式

$$a_0+a_1e+a_2e^2+\cdots+a_ne^n=0 \quad （其中 a_0\neq 0） \tag{1}$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是整數，將導致矛盾。證明中只用到整數的最簡單性質。從數論上說，只用到可除性的最初等的定理，具體說來，用到整數的質因子分解的唯一性，以及質數的個數是無窮的這兩點。

證明的方案如下。我們要建立一個方法，使能用有理數特別好地近似於 e 和 e 的冪，使得我們有

$$e=\frac{M_1+\varepsilon_1}{M}, \quad e^2=\frac{M_2+\varepsilon_2}{M}, \cdots, \quad e^n=\frac{M_n+\varepsilon_n}{M} \tag{2}$$

其中 $M, M_1, M_2, M_3, \cdots, M_n$ 是整數，$\frac{\varepsilon_1}{M}, \frac{\varepsilon_2}{M}, \frac{\varepsilon_n}{M}$ 是非常小的正的純小數。於是，在乘以 M 後，方程(1)化成：

---

① Hermite（厄爾尼特）：《Comptes Rendus》第77卷（1873），18-24，74-79，226-233，285-293頁，或其著作第三卷（1912），150頁。

② 《Sitzungsberichte der Berliner Akademie》，1882，679頁，以及《數學年刊》第20卷（1882）213頁。

$$[a_0M+a_1M_1+a_2M_2+\cdots+a_nM_n]+[a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n]$$
$$=0 \tag{3}$$

第一個括號內是整數，我們將證明它不是零。至於第二個括號，我將證明可使 ε_1，ε_2，…，ε_n 充分小，成爲一個正的純小數。於是得出不爲零的整數 $a_0M+a_1M_1+\cdots+a_nM_n$ 加上一個純小數 $a_1\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_n$ 成爲零的矛盾結論，這就表明(1) 是不可能的。

在剛才我已概述的討論過程中，我們將用到如果一個整數不能被確定數整除則此整數不可能爲零這個定理（因爲零可被每個數整除)。也就是說，我們將證明 M_1，…，M_n 可被某質數 P 整除，但 a_0M 沒有因子 P，於是 $a_0M+a_1M_1+\cdots+a_nM_n$ 不可能被 P 整除。因此不等於零。

實現上述證明的主要工具是厄爾米特爲此目的而發明的定積分，我們稱之爲厄爾米特積分。這個證明的關鍵在於它的結構，這個定積分之值爲正整數，並用來定義 M，

$$M=\int_0^\infty \frac{z^{p-1}[(z-1)(z-2)\cdots(z-n)]^p e^{-z}}{(p-1)!}\,dz \tag{4}$$

其中 n 是所設方程(1)的次數，p 是一個稍後將確定的質數。將積分 Me^ν 的積分區間在 ν 點分開，並令

$$M_\nu=e^\nu\int_\nu^\infty \frac{z^{p-1}[(z-1)(z-2)\cdots(z-n)]^p e^{-z}}{(p-1)!}\,dz \tag{4a}$$

$$\varepsilon_\nu=e^\nu\int_0^\nu \frac{z^{p-1}[(z-1)(z-2)\cdots(z-n)]^p e^{-z}}{(p-1)!}\,dz \tag{4b}$$

我們將得到對 e^ν $(\nu=1,\ 2,\cdots,\ n)$ 所需的近似式(2)。

現在給出證明的細節。

1. 我們從 Γ 函數理論開始的著名公式

$$\int_0^\infty z^{\rho-1}e^{-z}\,dz=\Gamma(\rho)$$

出發。我們只對整數值 ρ 用此公式。此時有 $\Gamma(\rho)=(\rho-1)!$，且將在這個限制下來推導它。如果在 $\rho>1$ 時對它進行分部積分：

$$\int_0^\infty z^{\rho-1}e^{-z}\,dz=[-z^{\rho-1}e^{-z}]_0^\infty+\int_0^\infty(\rho-1)z^{\rho-2}e^{-z}\,dz$$
$$=(\rho-1)\int_0^\infty z^{\rho-2}e^{-z}\,dz$$

右端的積分除去 z 的指數降低了以外，和左邊的形式完全一樣。如果反覆實施這個過程，因 ρ 是一個整數，最終必然得到 z^0；又因 $\int_0^\infty e^{-z}dz=1$，故可得

$$\int_0^\infty z^{\rho-1}e^{-z}\,dz=(\rho-1)(\rho-2)\cdots3\cdot2\cdot1=(\rho-1)! \tag{5}$$

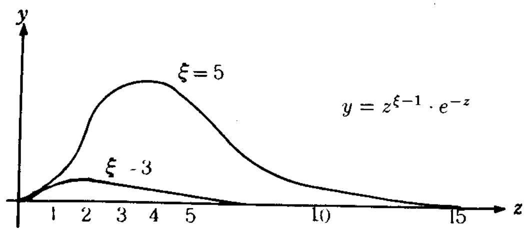
因此對於整數 ρ，這積分是一個隨 ρ 而非常迅速地增長的一個正整數。

爲了從幾何上闡明這個結果，畫出不同的 ρ 值的曲線 $y=z^{\rho-1}e^{-z}$。積分值於是由曲線下面伸延至無窮的面積所表示（附圖 1）。ρ 越大，曲線在原點越靠攏 z 軸，但在越過 $z=1$ 的地方上升得很快。對所有 ρ 值，曲線在 $z=\rho-1$ 處有最大值。換句話說，隨 ρ 增加，最大值發生在越來越右的地方。其值也隨 ρ 增加。在最大值的右邊，e^{-z} 起決定作用，因此曲線下降，逐漸逼近 z 軸。由此可知，此面積（我們的積分）總保持有限值，但隨 ρ 的增加而迅速增大。

2. 利用這個積分，很容易求出厄爾米特積分的值。用二項式定理展開被積函數：

$$[(z-1)(z-2)\cdots(z-n)]^p=[z^n+-\cdots+(-1)^n n!]^p$$
$$=z^{np}+-\cdots+(-1)^{np}(n!)^p$$

其中只寫出 z 的最高和最低次冪的項。積分變成



附圖 1

$$M=\frac{(-1)^{np}(n!)^p}{(p-1)!}\int_0^\infty z^{p-1}e^{-z}\,dz$$

$$+\sum_{k=p+1}^{np+p}\frac{c}{(p-1)!}\cdot\int_0^\infty z^{k-1}e^{-z}\,dz$$

c_ρ 是由二項式定理產生的整係數。現在可將公式(5)應用於每個這樣的積分，並求得：

$$M=(-1)^{np}(n!)^p+\sum_{\rho=1+p}^{np+p}c_\rho\frac{(k-1)!}{(p-1)!}$$

和式的下標 k 總是大於 p，因而 $\frac{(k-1)!}{(p-1)!}$ 是一個含 p 作爲因子的整數，所以可以將 p 作爲公因子提到整個和式之外：

$$M=(-1)^{np}(n!)^p+p[(c_{p+1}+c_{p+2}(p+1)+c_{p+3}(p+1)(p+2)+\cdots]$$

現在，就被 p 的可除性而論，M 的性質將取決於第一項 $(-1)^n(n!)^p$。因爲 p 是質數，如果它不能整除 1，2，⋯，n，則必然不能整除此項，而當 $p>n$ 時就是這種情況。因爲質數有無窮個，所以可以有無限多個方式滿足此條件，因而能使 $(-1)^{np}(n!)^p$，從而也使 M 不能被 p 整除。

再說 $a_0\neq 0$，按上述，可以選擇 p 也大於 $|a_0|$，從而使 a_0 不能被 p 整除。不過這樣的話，a_0M 就不能被 p 整除，而這正是我們所要證明的。

3.現在必須考查由 $(4a)$ 所定義的數 M_ν $(\nu=1, 2, \cdots, n)$。將因式 e^ν 放入積分號內，並引入新的積分變量 $\zeta=z-\nu$，當 z 從 ν 變到 ∞ 時，ζ 從 0 變到無窮大。我們有：

$$M_\nu=\int_0^\infty\frac{(\zeta+\nu)^{p-1}[(\zeta+\nu-1)(\zeta+\nu-2)\cdots(\zeta+\nu-n)]^pe^{-\zeta}}{(p-1)!}\,d\zeta$$

這個表達式的形式和前面對 M 的表達式完全相同，可以用同樣的方法處理。如果將被積函數的因式乘開，將得到最低冪爲 ζ^p 的一組整係數的 ζ 之冪，分子的積分於是成爲下列積分的組合：

$$\int_0^\infty\zeta^pe^{-\zeta}d\zeta,\ \int_0^\infty\zeta^{p+1}e^{-\zeta}d\zeta,\ \cdots,\ \int_0^\infty\zeta^{(n+1)p-1}e^{-\zeta}d\zeta$$

而按(5)式，它們分別等於 $p!$，$(p+1)!$，⋯，因而分子將是 $p!$ 乘以某個整數 A，故我們有

$$M_\nu=\frac{p!\,A_\nu}{(p-1)!}=pA_\nu,\quad(\nu=1,\ 2,\cdots,\ n)$$

換句話說，每個 M_ν 是一個能被 p 整除的整數。加上前面第二款所述之結果，即可證明 $a_0M+a_1M_1+\cdots+a_nM_n$ 不能被 p 整除，因此不爲零。

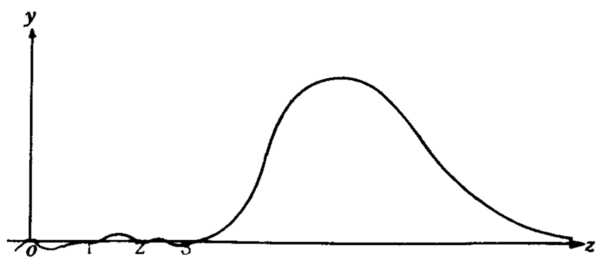
4.證明的第二部分涉及到和 $a_1\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_n$，其中，按(4b)式有：

$$\varepsilon_\nu=\int_0^\nu\frac{z^{p-1}[(z-1)(z-2)\cdots(z-n)]^pe^{-z+\nu}}{(p-1)!}\,dz$$

必須證明，適當選擇 p 後，可使 ε_ν 變得任意小。爲此，要利用可以使 p 任意大這個條件。因爲至今加在 p 上的唯一條件是它必須是大於 n 也大於 a_0 的質數，這些條件可以用任意大的質數來滿足。

我們來看被積函數的圖形。在 $z=0$ 處它與 z 軸相切，但在 $z=1$，2，⋯，n（附圖 2 裏，$n=3$），因爲 p 是奇數，它既與 x 軸相切，又與它相交。不久會看到，在分母中出現 $(p-1)!$，使得 p 很大時，在區間 $(0,\ n)$ 內曲線僅稍稍偏離 z 軸，因此有理由使得 ε_ν 十分小。對 $z>n$，曲線上升而且漸近地趨向前面的曲線 $z^{p-1}e^{-z}$ $(\rho=(n+1)p)$，並最終逼近於 z 軸。正因如此，積分的值 M（該處是從 0 到 ∞ 取積分）隨 p 而迅速增加。

在實際估計這些積分時，一個粗糙的近似就夠用了。設 G 和 g_ν 分別是函數 $z\cdot(z-1)\cdots(z-n)$ 和 $(z-1)(z-2)\cdots(z-n)e^{-z+\nu}$ 在區



附圖 2

間 $(0, n)$ 的絕對值的最大值：

$$\left.\begin{aligned}&|z(z-1)\cdots(z-n)|\leqslant G\\&|(z-1)(z-2)\cdots(z-n)e^{-z+\nu}|\leqslant g_\nu\end{aligned}\right\} 0\leqslant z\leqslant n$$

因爲函數的積分總不會大於其絕對值的積分，故對每個 ε_ν 我們有：

$$|\varepsilon_\nu|\leqslant\left\{\int_0^\nu \frac{G^{p-1}g_\nu}{(p-1)!}\,dz=\frac{G^{p-1}g_\nu\cdot\nu}{(p-1)!}\right\} \tag{6}$$

現在，G，g_ν 和 ν 是與 p 無關的固定數，但分母 $(p-1)!$ 隨 p 增長的速度最終要比 G^{p-1} 大得多，或較準確地說，當 p 充分大時，分數 $\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$ 會變得比任何預先指定的小數還小。因此，從(6)式，可以通過選擇 p 充分大而使 n 個數 ε_ν 任意小。

由此立即可知，可以使 n 項之和 $a_1\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_n$ 任意小。事實上，我們有

$$|a_1\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_n|\leqslant|a_1\varepsilon_1|+\cdots+|a_n\varepsilon_n|$$

而據(6)又有

$$\leqslant(|a_1|\cdot 1g_1+|a_2|\cdot 2g_2+\cdots+|a_n|\cdot ng_n)\cdot\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$$

因爲括號內的值與 p 無關，由於因式 $\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$ 的原因，我們可使整個右端，從而使 $a_1\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_n$ 變成我們所要求的那樣小，特別是小於 1。

據此我們就證明了我們所要證的，即設等式(3)

$$[a_0M+a_1M_1+\cdots+a_nM_n]+[a_1\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_n]=0$$

成立會導致矛盾，即一個不爲零的整數加上一個純小數不爲 0。因爲這樣的等式不存在，e 的超越性也就被證明了。

π 的超越性的證明

我們回頭來證明 π 的超越性。這個證明比前一個證明困難些，但還算是容易的，只是必須從正確的結論逆推過去，而這一點確實是全部數學發現的藝術。

林德曼所考慮的問題如下：到目前爲止，業已證明，如果係數 a_ν 和指數 ν 是通常的整數的話，等式 $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^\nu=0$ 是不能成立的。當 a_ν，ν 是任意代數數時，就不能得到同樣的證明嗎？它證明了這一點。事實上，它的關於指數函數的最一般的定理是：如果 a_ν，b_ν 是代數數，a_ν 是任意的而 b_ν 彼此不相同，則等式 $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{b_\nu}=0$ 是不能成立的。於是，π 的超越性作爲本定理的推論而被證明。因爲，衆所周知，$1+e^{i\pi}=0$，如果 π 是代數數，則 $i\pi$ 亦然，而這個等式的成立與上述林德曼定理相矛盾。

我現在只來詳證林德曼定理的一個特殊情形，由此可導出 π 的超越性。我仍然主要是按照希爾伯特在《數學年刊》第 43 卷上的證明，它在本質上比林德曼的證明簡單，而且正是對 e 討論的推廣。

出發點是關係

$$1+e^{i\pi}=0 \tag{1}$$

如果 π 滿足任何整係數的代數方程，則 $i\pi$ 也滿足這樣一個方程，設 α_1，α_2，…，α_n 是包括 $i\pi$ 在內的該方程的所有根，則由(1)式，必然也有

$$(1+e^{\alpha_1})(1+e^{\alpha_2})\cdots(1+e^{\alpha_n})=0$$

展開後可得

$$\begin{aligned}1&+(e^{\alpha_1}+e^{\alpha_2}+\cdots+e^{\alpha_n})+(e^{\alpha_1+\alpha_2}+e^{\alpha_1+\alpha_3}+\cdots+e^{\alpha_{n-1}+\alpha_n})\\&+\cdots+(e^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n})=0\end{aligned} \tag{2}$$

其中某些指數也許偶然爲 0，每當出現這種情況，左邊和式中將出現一個正的被加數 1，我們把它們和第一項的 1 加在一起成爲一個正整數 a_0，它必然不爲零。其餘不爲零的指數，表之以 β_1，β_2，…，β_N，於是將(2)式寫成

$$a_0+e^{\beta_1}+e^{\beta_2}+\cdots+e^{\beta_N}=0,\ \text{其中}\ a_0>0 \tag{3}$$

現在，β_1，…，β_N 也是整係數方程的根，因爲從根爲 α_1，…，α_n 的方程式，可以構成仍有整係數而根爲 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_3$，…，的方程，然後作出以 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$，…，爲根的方程，等等。最後，$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 自身是有理數並因此而滿足一個線性整係數方程。將所有這些方程乘在一起，又得到一個整係數方程，它可能具有某些零

根，但其餘的根就是$\beta_1, \cdots, \beta_N$。省略去對應於零根的未知數的冪，就剩下具有N個β為根的N次整係數方程，且其絕對項不為零：

$$b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_Nz^N=0,\ \text{其中}\ b_0,\ b_N\neq 0 \tag{4}$$

現在可以證明林德曼定理的下述特殊情形：如果$\beta_1, \cdots, \beta_N$是一個整係數N次代數方程的根，且$a_0\neq 0$，則形為(3)的等式不可能存在。這個定理包含了π的超越性。

這個證明的步驟和證明e的超越性時一樣。正像在那裏可以用有理數來逼近冪$e^1, e^2, \cdots, e^n$一樣，這裏要考慮(3)式中的e的冪的最佳可能逼近，並用舊符號寫成：

$$e^{\beta_1}=\frac{M_1+\varepsilon_1}{M},\quad e^{\beta_2}=\frac{M_2+\varepsilon_2}{M},\ \cdots,\ e^{\beta_N}=\frac{M_N+\varepsilon_N}{M} \tag{5}$$

其中分母M仍然是一個普通的整數，但$M_1, \cdots, M_N$不像以前一樣是整數，而是整的代數數，而$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_N$一般來說是複數，其絕對值十分小。這一個證明比前一個證明難就難在這裏，但是所有$M_1, \cdots, M_N$之和仍然是整數。將它們重新排列，使得等式（將(3)式乘以M並利用(5)）

$$[a_0M+M_1+M_2+\cdots+M_N]+[\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n]=0 \tag{6}$$

的第一個被加項是一個非零整數，而第二個被加項的絕對值仍將小於1。本質上，這就是我們前面利用過的同樣矛盾。借此矛盾證明(6)和(3)式是不可能的，從而完成了我們的證明。至於細節，我們將再次證明$M_1+\cdots+M_N$可被某質數p整除，而a_0M卻不能，從而證明(6)式的第一個和式不為0；然後選擇p充分大，使第二個和式任意小。

1.我們首先關心的是用厄爾米特積分的適當的推廣來確定M。這裏有一個提示：厄爾米特的因式$(z-1)(z-2)\cdots(z-n)$的零點就是所假定的代數方程裏e的指數。因此，這個因式可代之以在(3)式中所用指數（即(4)的解）構成的乘積

$$(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_N)=\frac{1}{b_N}(b_0+b_Nz+\cdots+b_Nz^N) \tag{7}$$

其後，關鍵之處是加上b_N的一個適當的冪為因子，這在以前是沒有必要的，因為$(z-1)\cdots(z-N)$是整係數的。於是，最後令：

$$M=\int_0^\infty\frac{e^{-z}z^{p-1}dz}{(p-1)!}[b_0+b_1z+\cdots+b_Nz^N]^p b_N^{(N-1)p-1} \tag{8}$$

2.正如以前一樣，按z的冪展開M的被積函數。於是，含最低次冪即z^{p-1}的項為：

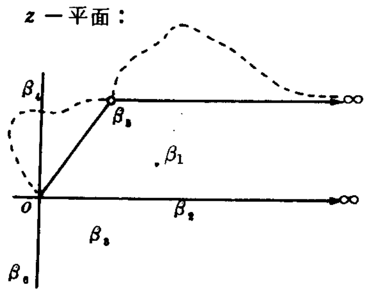
$$\int_0^\infty\frac{e^{-z}z^{p-1}dz}{(p-1)!}b_0^p b_N^{(N-1)p-1}=b_0^p b_N^{(N-1)p-1}$$

其中積分已按Γ函數算出。被積函數中其餘各項包含z^p或更高次冪，因此積分後含因子$\frac{p!}{(p-1)!}$再乘以整數，故能被p整除。於是，M是一個整數且不能被p整除，只要p不是b_0或b_N的因子。但因b_0，b_N都不為0，只要選擇p，使$p>|b_0|$，$p>|b_N|$即可做到這一點。

因為$a_0>0$，所以只要加上條件$p>a_0$，即可使a_0M不能被p整除。由於有無窮多個質數，故有無限多種方法滿足這些條件。

3.現在必須建立M_ν與ε_ν。由於這裏代替ν的β_ν可以是複數，事實上其中之一是$i\pi$，所以必須修改我們原先的計劃。如果要像以前那樣將積分M分成兩部分，則必須首先確定在複平面內的積分線路。幸而，我們的被積函數是z的有限單值函數，除在$z=\infty$處有一個本性奇點外，處處正則。我們不沿實軸從0到∞積分，而選任何從0到∞的線路，只要它最終漸近地平行於實半軸就行了。按e^{-z}在複平面的性質，為了使積分有意義，這樣做是必要的。

現在平面上將N個點$\beta_1, \cdots, \beta_N$，標出來。回想一下，如果首先沿直線從0到β_N中之一點積分，然後沿平行於x軸積分到∞（附圖3），就可以得到同樣的M值。沿這條線路，可將M分成兩個各有特性的部分；沿o到β_ν的直線的積分為ε_ν，它可隨p的增加而變得任意小沿平行x軸的直線從β_ν到∞積分，則給出代數整數M_ν：



附圖3

$$\varepsilon_\nu = e^{\beta_\nu}\int_0^{\beta_\nu}\frac{e^{-z}z^{p-1}dz}{(p-1)!}[b_0+b_1 z+\cdots+b_N z^N]^p b_N^{(N-1)p-1} \tag{8a}$$

$$(\nu=1,\ 2,\cdots,\ N)$$

$$M_\nu = e^{\beta_\nu}\int_{\beta_\nu}^{\infty}\frac{e^{-z}z^{p-1}\,dz}{(p-1)!}[b_0+b_1 z+\cdots+b_N z^N]^p b_N^{(N-1)p-1} \tag{8b}$$

這些假設滿足(5)。我們選擇直的積分路線完全是爲了方便；當然，選擇從 0 到β_ν的曲線路線，能得出同樣的值，但當路線是直的時，較易估計積分。類似地，可選擇從β_ν到∞的，有水平漸近線的任意曲線來代替水平直線，但會增加不必要的麻煩。

4. 首先討論ε_ν的估計，因爲這一項不牽涉到任何新的內容，只要記住複積分的絕對值不大於被積函數的最大值乘以積分路線的長度，在這裏是$|\beta_\nu|$。這樣的話，ε_ν的上極限就是$\dfrac{G^{p-1}}{(p-1)!}$再乘以與p無關的因子。G表示$|z(b_0+\cdots+b_N z^N)b_N^{N-1}|$在一區域中的最大值，而此區域包含連接 0 與$\beta_\nu$ ($\nu=1,\cdots,N$) 的整個直線段。由此，像前面一樣，通過增加p，可使ε_ν、從而使$\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_N$要多小有多小，特別是小於 1。

5. 只有在討論M_ν時，才有完全新的考慮，其實也只是前面推理的推廣，不過現在用代數數代替過去的整數。我們將作爲一個整體來考慮和：

$$\sum_{\nu=1}^{N}M_\nu=\sum_{\nu=1}^{N}e^{\beta_\nu}\int_{\beta_\nu}^{\infty}\frac{e^{-z}z^{p-1}dz}{(p-1)!}[b_0+b_1 z+\cdots+b_N z^N]^p\cdot b_N^{(N-1)p-1}$$

如果利用(1)式，用乘積$(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_N)$來代替上面和式裏每項中的$z$的多項式，並引入$\zeta=z-\beta_\nu$這個從 0 到$\infty$取遍實值的新積分變量，我們得：

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{N}M_\nu=\sum_{\nu=1}^{N}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\zeta}d\zeta}{(p-1)!}(\zeta+\beta_\nu)^{p-1}(\zeta+\beta_\nu-\beta_1)^p\cdots\zeta^p\cdots(\zeta+\beta_\nu-\beta_N)^p b_N^{Np-1}\\ \text{也可寫成}=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-\zeta}d\zeta}{(p-1)!}\zeta^p\Phi(\zeta)\end{cases} \tag{9}$$

其中我們令

$$\Phi(\zeta)=\sum_{\nu=1}^{N}b_N^{Np-1}(\zeta+\beta_\nu)^{p-1}(\zeta+\beta_\nu-\beta_1)^p\cdots(\zeta+\beta_\nu-\beta_{\nu-1})^p(\zeta+\beta_\nu-\beta_{\nu+1})^p\cdots(\zeta+\beta_\nu-\beta_N)^p \tag{9'}$$

和式$\Phi(\zeta)$和它的N項中的每一項同樣是ζ的多項式。在每一項中，N個量$\beta_1,\cdots,\beta_N$中的一個，有着值得注意的地位。但如果考慮把$\Phi(\zeta)$展開以後所得到的ζ的多項式，就看到這N個量同時出現在ζ的不同冪的係數中而未表現有何不同。換句話說，這些係數都是$\beta_1,\cdots,\beta_N$的對稱函數。通過乘法定理把這些因式乘開後可進一步推知，這些$\beta_1,\cdots,\beta_N$的函數是具有有理整係數的有理整函數。但根據著名的代數定理，一個有理方程的所有根的有理對稱函數，當其係數是有理數時，此函數本身也是一個有理數。既然$\beta_1,\cdots,\beta_N$都是方程(4)的根，所以$\Phi(\zeta)$的係數實際上都是有理數。

但是，我們所需要的是有理整數。這可由作爲$\Phi(\zeta)$的因子而出現的b_N的冪來給出。事實上，我們能把這個冪分配到其中的所有線性因式內，並寫成：

$$\Phi(\zeta)=\sum_{\nu=1}^{N}(b_N\zeta+b_N\beta_\nu)^{p-1}(b_N\zeta+b_N\beta_\nu-b_N\beta_1)^p\cdots(b_N\zeta+b_N\beta_\nu-b_N\beta_{\nu-1})^p(b_N\zeta+b_N\beta_\nu-b_N\beta_{\nu+1})^p\cdots(b_N\zeta+b_N\beta_\nu-b_N\beta_N)^p \tag{9''}$$

和前面一樣，把這個多項式展開後，ζ的係數是乘積$b_N\beta_1,b_N\beta_2,\cdots,b_N\beta_N$的有理整對稱函數，其係數爲整數。但這個$N$個數之積是方程

$$b_0+b_1\frac{z}{b_N}+\cdots+b_{N-1}\left(\frac{z}{b_N}\right)^{N-1}+b_N\left(\frac{z}{b_N}\right)^N=0$$

的根，此方程是用$\dfrac{z}{b_N}$代替(4)中的z而變成的。如果用b_N^{N-1}乘此方程，得

$$b_0 b_N^{N-1}+b_1 b_N^{N-2}\cdot z+\cdots+b_{N-2}b_N z^{N-2}+b_{N-1}z^{N-1}+z^N=0 \tag{10}$$

這是一個最高次係數爲 1 的整係數方程，滿足這樣方程的數稱之爲整代數數。因此對上述定理可作如下改進：最高次冪係數爲 1 的整係數

方程，其所有根的有理整對稱函數，也是有理整數。你們可以在代數教材裏找到這個定理，即使沒有講得這麼精確，你們也可以根據證明的步驟，確信其正確。

現在，多項式$\Phi(\zeta)$的係數實際上已滿足此定理的假設，故皆爲有理整數，記之爲$A_0, A_1, \cdots, A_{Np-1}$。於是我們有：

$$\sum_{\nu=1}^{N} M_\nu=\int_0^\infty \frac{e^{-\zeta}\zeta^p\, d\zeta}{(p-1)!}(A_0+A_1\zeta+\cdots+A_{Np-1}\zeta^{Np-1})$$

有了這個式子，已基本達到目的了。因爲，如果利用Γ函數完成分子的積分，我們得到因子$p!$，$(p+1)!$，$(p+2)!$，…，因爲每一項均含有ζ的p次以上的冪。除以$(p-1)!$後，仍然保持一個p的倍數作爲因子，而其它因子是有理整數（$A_0, A_1, \cdots$）。因此，$\sum_{\nu=1}^{N} M_\nu$必然是一個可被p整除的有理整數。

我們已看到，a_0M不能被p整除，故

$$a_0M+\sum_{\nu=1}^{N} M_\nu$$

必然是一個不能被p整除的有理整數，特別是不爲0。因此，等式(6)

$$\left\{a_0M+\sum_{\nu=1}^{N} M_\nu\right\}+\left\{\sum_{\nu=1}^{N}\varepsilon_\nu\right\}=0$$

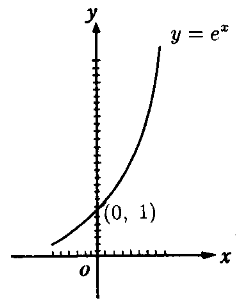
不可能存在，因爲前面已證明$\sum_{\nu=1}^{N}\varepsilon_\nu$的絕對值小於1，一個不爲零的整數加上$\sum_{\nu=1}^{N}\varepsilon_\nu$不可能爲零。這就證明了林德曼定理的前述特殊情形，亦即證明了π的超越性。

這裏，我還想談一下林德曼的一般定理中另一個有意義的特殊情形，即除$\beta=0, b=1$這個平凡的特例外，方程$e^\beta=b$的β和b不可能都是代數數。換句話說，一個代數數β的指數函數和一個代數數b的自然對數，除這種平凡的情況外都是超越數。這裏就包括e和π的超越性，對前者，$\beta=1$，對後者，$b=-1$（因爲$e^{i\pi}=-1$）。對上述討論加以確切地推廣，即可證明本定理。證明可以從$b-e^\beta$開始，而不用以前的$1+e^\alpha$。這樣不僅必須考慮β的代數方程的所有根，而且要考慮b的方程的所有根，才能獲得一個類似於(3)的方程，因而需要

更多的符號，使證明顯得難懂一些，但不需要完全新的思想。

我不打算進一步給出這些證明，但我想用幾何圖形指明上述關於指數函數的定理的意義。我們設想，把所有具有代數數橫座標的點都標在x軸上。我們知道，有理數已是稠密的了，代數數當然更稠密。

一開始有人可能會想到，代數數將窮盡所有實數，但我們的定理說明不是這種情況；在代數數之間還有無窮多個其它的數，即超越數，且我們已有無窮多個超越數的例子，即$e^{\text{代數數}}$，log（代數數）及這些超越數的所有代數函數。如果把方程寫成爲$y=e^x$，並在xy平面上畫出曲線（附圖4），這事就更爲明顯了。如果在x軸和y軸上都標出代數數，並考慮平面上x，y座標都是代數數的點，這些點將“稠密地”覆蓋住xy平面。盡管有這樣稠密的分布，指數曲線$y=e^x$上除去$x=0, y=1$外沒有一個代數點。所有其它滿足$y=e^x$的數對x、y中，至少有一個x或y是超越數。指數曲線的這種趨勢，當然是一個最值得注意的特點。



附圖 4

這些定理的重大意義在於揭示出存在著大量的不僅僅屬於有理數，而且不能用所有有理數的代數運算來表示的數，這對我們的數的連續性的概念有巨大的影響。如果說無理數的發現對畢達哥拉斯來說已是值得宰一百頭牛來進行一次大祭的話，那麼在作出這樣的發現之後，它又該怎樣去祭祀呢！

值得注意的是，儘管徹底思考一下就明白，超越數的問題是非常簡單的，但一般人還是沒有掌握和消化它。我曾一再遇到這種情況：在進行考試時，應考者甚至不能解釋“超越”這個概念。它們常常回答我說：一個超越數不滿足任何代數方程。這當然是錯誤的。例如$e-x=0$就是一個例子。方程的係數必須是有理數這個要點被忽視了。

如果你們把上述超越性證明再徹底思考一下，你們就能從整體上掌握這些簡單的步驟，並永遠化爲己有。你們只需把厄爾米特積分記

在腦裏，其它一切都會迎刃而解。我要強調的是，在這些證明中，我們已經用到積分概念（或用幾何語言來說，用到面積概念），把它看成本質上很初等的東西，而且相信這對證明的清晰性起了很大作用。在這一方面，請對照韋伯－韋爾斯坦因第一卷裏的敍述或我那本小書《Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie》（萊比錫，1895年，F·塔格特整理）中的敍述，我想你們一定會承認，上述兩書裏的證明是遠遠不及前述證明清晰並易於掌握，因爲在上述兩本書裏，就像舊時的學校教科書裏一樣，避免使用積分符號，而用展成級數的近似計算代替了。

這些關於代數數在實數域的分布情況的討論，自然也會把我們引到在我的講課過程中常常提到的第二個現代領域——集合論，我現在就對此作比較詳細的討論。

II、集合論

集合論的奠基人康托的研究，正是從考慮超越數的存在開始的①。它的研究使人們從一個完全新的觀點來看待超越數。

如果說我對你們作的集合論簡要概述有什麼特點的話，那就是把處理若干具體例子放在重要地位，而不像通常那樣採用十分概括的抽象說明，使人很難掌握，甚至失去信心。

1. 集合的勢

爲此，我提醒你們，在以往的討論中，我們曾不得不經常涉及有不同特性的數的總和，現在我們可稱之爲數的集合。如果限於實數，這些集合是：

(1)正整數。
(2)有理數。
(3)代數數。
(4)所有實數。

這些集合中的每一個都含有無窮多個數。我們的第一個問題是：

① 見《Journal für Reine und Angewandte Mathematik, vol.》(1873)，p. 258。

儘管如此，能否在一個確定意義下比較這些集合的大小或範圍，即能否稱某個"無窮"大於、等於或小於另一個"無窮"？康托的偉大功績就在於通過建立準確的概念，澄清並回答了這個確實十分不確定的問題。首先我們要考慮它的勢或基數的概念：當兩個集合的元素能夠安排得一一對應，即當兩個集合能被這樣聯繫起來，使一個集合的每一個元素，均對應於另一個集合的一個元素，反之亦然，則稱此兩集合有相等的勢（等價）。如果不可能建立這樣的關係，就稱爲不等勢。如果不論用什麼辦法去建立對應關係，一個集合總有元素剩下來，則稱此集合有較大的勢。

現在我們把這個原則應用到上面的四個例子中。一開始，似乎會覺得正整數的勢會小於有理數的勢，而後者又小於代數數的勢，最後小於所有實數的勢，因爲每一個集合都是由前一個集合加上新的元素而組成。但這個結論下得太匆忙了。因爲，雖然一個有限集合的勢總是大於它的一部分的勢，但對無窮集合這却是不正確的。對這種差異不必驚訝，因爲我們涉及的是兩個完全不同範疇的情況。我們來看一個簡單的例子，它表明一個無窮集合及其一部分可具有相同的勢，即所有正整數和所有正偶數集合爲

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & . & . & .., \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & & \\ 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, & . & . & .. \end{array}$$

用雙箭頭標出的對應顯然屬於前面所規定的那一類，一個集合中的每個元素對應另一集合的一個元素，且只對應一個。因此，按康托的定義，正整數集和它的偶數部分集有相同的勢。

你們看到，上述四個集合的勢的問題，並不很容易處理。康托在1873年的偉大發現提供了一個簡單的答案，這個答案唯其簡單，更顯得奇妙。答案是：正整數、有理數和代數數三個集有相同的勢，但所有實數的集有另外一個較大的勢。一個集合的元素如能與正整數集合一一對應（因而有同樣的勢），則稱之爲可數集。因此上面的定理可說成：有理數與代數數集是可數的，所有實數集是不可數的。

我們首先給出關於有理數集合的證明，你們當中有些人無疑已熟